第 6 講　軌跡

PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡

1　[1]　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が $2:1$ であるという。点Pの軌跡を求めよ。

[2]　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする。$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの軌跡を求めよ。

Point Pickup

[1]　点Pの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

[2]　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x，y それぞれが変数 a（媒介変数）で表されるとき，a を消去して x，y の関係式を導くことで，点Pの軌跡を求めることができる。媒介変数のとりうる値の範囲に注意。

第 6 講　PART1　確認問題

1　点Ｐから２つの円

$$x^2+y^2=2,$$

$$x^2+(y-4)^2=1$$

それぞれに引いた接線の長さの比が３：１であるとき，点Ｐの軌跡を求めよ。

中心が $\left(\boxed{ア},\ \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$，半径が $\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ の円

2　放物線 $y=-x^2-(2a-6)x+a^2+a-1$ の頂点をＰとする。$-1<a\leqq 1$ のとき，頂点Ｐの軌跡を求めよ。

放物線 $y=\boxed{キ}x^2-\boxed{ク}x+\boxed{ケコ}$ の $\boxed{サ}$ の部分

[$\boxed{サ}$ の選択肢]

①　$-4<x\leqq -2$　　②　$-4\leqq x<-2$

③　$-1<x\leqq 1$　　④　$-1\leqq x<1$

⑤　$2<x\leqq 4$　　⑥　$2\leqq x<4$

第 6 講　軌跡

PART1　定点からの距離が一定，媒介変数と軌跡

1　[1]　点Pから2円 $x^2+y^2=1$，$(x-3)^2+y^2=1$ に引いた接線の長さの比が 2：1 であるという。点Pの軌跡を求めよ。

[2]　放物線 $y=x^2+(4-4a)x+4a-4$ の頂点をPとする。$0<a\leqq 2$ のとき，頂点Pの軌跡を求めよ。

[1]　円 $x^2+y^2=1$ …… ① の中心をOとすると，O(0, 0)，半径は1

円 $(x-3)^2+y^2=1$ ……② の中心をAとすると，A(3, 0)，半径は1

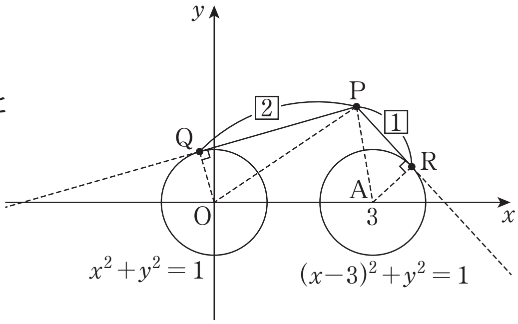
点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

点Pから円①に引いた接線の接点をQとすると

$$PQ^2=OP^2-OQ^2=x^2+y^2-1$$

点Pから円②に引いた接線の接点をRとすると

$$PR^2=AP^2-AR^2=(x-3)^2+y^2-1$$



条件より　PQ：PR＝2：1　　2PR＝PQ

両辺を2乗して　$4PR^2=PQ^2$

よって　$4\{(x-3)^2+y^2-1\}=x^2+y^2-1$

整理すると　$x^2-8x+y^2+11=0$　　すなわち　$(x-4)^2+y^2=5$

したがって，求める軌跡は　中心 (4, 0)，半径 $\sqrt{5}$ の円

[2]　$y=x^2+(4-4a)x+4a-4=\{x-(2a-2)\}^2-4a^2+12a-8$

頂点Pの座標は　$(2a-2,\ -4a^2+12a-8)$

よって，頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とおくと

$x=2a-2$ …… ①　　　$y=-4a^2+12a-8$ …… ②

①より　$a=\dfrac{x+2}{2}$　　これを②に代入して　$y=-4\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2+12\cdot\dfrac{x+2}{2}-8=-x^2+2x$

また，$0<a\leqq 2$ より　$0<\dfrac{x+2}{2}\leqq 2$　　$-2<x\leqq 2$

したがって，求める軌跡は　放物線 $y=-x^2+2x$ の $-2<x\leqq 2$ の部分

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：9，ウ：2，エ：5，オ：2，カ：4

[解説]

円 $x^2+y^2=2$ …… ①の中心を O とすると

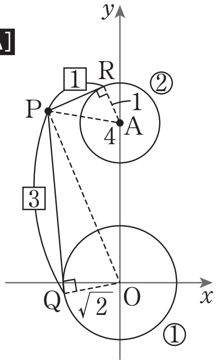
$O(0,\ 0)$，半径は $\sqrt{2}$

円 $x^2+(y-4)^2=1$ …… ②の中心を A とすると

$A(0,\ 4)$，半径は 1

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。 [A]

点 P から円①に引いた接線の接点を Q とすると



$$PQ^2=OP^2-OQ^2$$
$$=x^2+y^2-2$$

点 P から円②に引いた接線の接点を R とすると

$$PR^2=AP^2-AR^2$$
$$=x^2+(y-4)^2-1$$

条件より　$PQ:PR=3:1$

$$3PR=PQ$$

両辺を 2 乗すると　$9PR^2=PQ^2$

よって

$$9\{x^2+(y-4)^2-1\}=x^2+y^2-2$$

整理すると

$$x^2+y^2-9y+\frac{137}{8}=0$$

すなわち

$$x^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$$

よって，求める軌跡は

中心が $\left(0,\ \dfrac{9}{2}\right)$，半径が $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ の円

> [A]　軌跡の求め方
> 求める軌跡上の点の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の関係式で表す。

2 **[正解]** キ：2，ク：7，ケコ：11，サ：⑥

[解説]

$$y=-x^2-(2a-6)x+a^2+a-1$$
$$=-\{x+(a-3)\}^2+2a^2-5a+8$$

よって，頂点Pの座標は

$$\left(-a+3,\ 2a^2-5a+8\right)$$

頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-a+3 \cdots\cdots (*)$$
$$y=2a^2-5a+8 \cdots\cdots (**)$$

$(*)$より　$a=-x+3$

これを$(**)$に代入して

$$y=2(-x+3)^2-5(-x+3)+8$$
$$=2x^2-7x+11$$

また，$-1<a\leqq 1$ より　$-1<-x+3\leqq 1$ [B]

$$2\leqq x<4$$

よって，求める軌跡は

放物線 $y=2x^2-7x+11$ の $2\leqq x<4$ の部分

[B]　媒介変数 a のとり得る値の範囲に注意。